$\boxed{1}$ [琉大オープン模試 数学(乙) 第1問]

次の問いに答えよ。

問1　サイコロを2回投げるとき，出た目の和が3の倍数である事象を A，1回目に出た目が3の倍数でない事象を B とする。このとき，条件付き確率 $P_A(B)$ を求めよ。

問2　7^{50} を6で割った余りはなにか，理由とともに答えよ。

問3　△ABCと点Pがあり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{13}{36}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立っている。直線APと線分BCの交点をQとするとき，AP：PQと，BQ：QCを求めよ。

(解説)

解答の方針

問1.　（1回目の出た目，2回目の出た目）の様な書き方で，和が3の倍数になる場合を書き出してみる。

問2.　$7=6+1$ であるから，$(6+1)^{50}$ を展開する方法を考える。

問3.　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ かつ $s+t=1$ $\iff$ 点Qは直線AB上

を利用するため，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の係数の和を1にする変形を試みる。

解答

問1　サイコロの目の出方の総数は　$6^2=36$ (通り)

出た目の和が3の倍数である目の出方は

和が3のとき　(1，2)，(2，1) の2通り

和が6のとき　(1，5)，(2，4)，(3，3)，(4，2)，(5，1) の5通り

和が9のとき　(3，6)，(4，5)，(5，4)，(6，3) の4通り

和が12のとき　(6，6) の1通り

である。

よって，出た目の和が3の倍数である目の出方は　$2+5+4+1=12$ (通り)

したがって，$P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

また，出た目の和が3の倍数かつ，1回目に出た目が3の倍数でない目の出方は

8通り

よって，$P(A\cap B)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

したがって，求める条件付き確率は　$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{9}\div\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$　…（答）

問2　二項定理を用いると

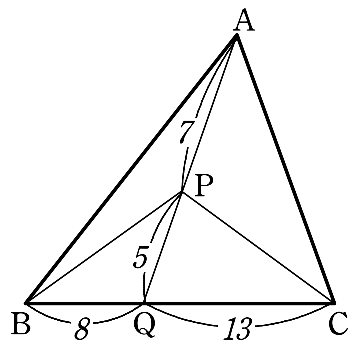
$$7^{50}=(6+1)^{50}$$

$$= 6^{50} + {}_{50}C_1 6^{49} + {}_{50}C_2 6^{48} + \cdots + {}_{50}C_{49} \cdot 6 + 1$$
$$= 6(6^{49} + {}_{50}C_1 6^{48} + {}_{50}C_2 6^{47} + \cdots + {}_{50}C_{49}) + 1$$

したがって，7^{50} を 6 で割った余りは 1　…（答）

問 3

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{13}{36}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{8}{36}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= \frac{7}{12}\left(\frac{13\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 8\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{8+13}\right)$$



したがって，辺 BC を 8：13 に内分する点を Q とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

ゆえに

$AP:PQ = 7:5$，BQ：QC＝8：13　…（答）

受験生へアドバイス

琉大数学（乙）の第1問は小問集合が出題されることが多く、出題分野は数学Ⅱ、数学Bと数学Aの確率からが多い。教科書の例題レベルの問題が多いので、先に上げた分野の教科書の例題はしっかりマスターしておくこと。

$\boxed{2}$ [琉大オープン模試 数学(乙) 第2問]

$f(x) = \sin 3x + \frac{9}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ とするとき，次の問いに答えよ。

問 1　加法定理を利用して，$\sin 2x$ を $\sin x$，$\cos x$ を用いて表せ。また，$\cos 2x$ を $\sin x$ を用いて表せ。

問 2　$\sin 3x = \sin(2x + x)$ であることを利用して，$\sin 3x$ を $\sin x$ を用いて表せ。

問 3　$\sin x = t$ とおくとき，$f(x)$ を t を用いて表せ。

問 4　$f(x)$ の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

解説

解答の方針

問1,問2.　加法定理と $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を利用して変形する。

問3.　問1,問2.の結果を代入したのち，$\sin x = t$ とおく。

問4.　3次関数の最大最小問題である。まず微分して，増減表を書いてみる。

解答

問1　$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x$

$= 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

ここで，$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より，$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ であるので，

$\cos 2x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x$

問2　加法定理より，

$\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x$

問1より，

$\sin 3x = (2\sin x\cos x)\cos x + (1-2\sin^2 x)\sin x$

$= 2\sin x\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ であるので，

$\sin 3x = 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 3\sin x - 4\sin^3 x$

問3　問2より，

$$f(x) = \sin 3x + \frac{9}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}$$

$$= (3\sin x - 4\sin^3 x) + \frac{9}{4}(1-2\sin^2 x) - \frac{1}{4}$$

$$= -4\sin^3 x - \frac{9}{2}\sin^2 x + 3\sin x + 2$$

$\sin x = t$ とおくと　$f(x) = -4t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 3t + 2$

問4　$t = \sin x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ のとき，

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから　$-1 \leqq t \leqq 1$

問3より，

$g(t) = -4t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 3t + 2$ とおくと

$g'(t) = -12t^2 - 9t + 3 = -3(4t-1)(t+1)$

$g'(t) = 0$ とすると　$t = \frac{1}{4}$，-1

$-1 \leqq t \leqq 1$ における $g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$

よって，$g(t)$ は $t=1$ のとき，最小値 $-\dfrac{7}{2}$ をとる。

すなわち，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，最小値 $-\dfrac{7}{2}$ をとる。

受験生へのアドバイス

第2問は教科書の節末問題，章末問題レベルが多く、出題分野は第1問の解説で挙げた通りである。琉大数学（乙）受験生は，数学Ⅱ，数学B（数列とベクトル），数学A（確率）の教科書をしっかり勉強しておくことで合格点が得られるであろう。