$\boxed{1}$ 琉大オープン模試 数学 甲 第1問

n と k を自然数，t を正の実数とする。

問1.　不定積分 $\int x\sin tx\,dx$ を求めよ。

問2.　定積分 $\int_0^{\frac{2}{t}\pi}|x\sin tx|\,dx$ を求めよ。

問3.　定積分 $I_k(t)=\int_{\frac{k-1}{t}\pi}^{\frac{k}{t}\pi}|x\sin tx|\,dx$ を，k が奇数である場合と k が偶数である場合、それぞれ t と k を用いて表せ。

問4.　定積分 $\int_0^{\frac{2n}{t}\pi}|x\sin tx|\,dx$ を求めよ。

解答の方針

問1.　部分積分法を用いて計算する。

問2,問3.　$x\sin tx$ の符号によって場合分けしてから，積分する。

問4.　$x\sin tx$ の符号によって場合分けすると，$2n$ 個の部分に分けて積分する。

解答

問1.

$$\int x\sin tx\,dx=\int x\left(-\frac{1}{t}\cos tx\right)'dx$$

$$=x\left(-\frac{1}{t}\cos tx\right)-\int 1\cdot\left(-\frac{1}{t}\cos tx\right)dx$$

$$=-\frac{1}{t}x\cos tx+\frac{1}{t^2}\sin tx+C$$ （C は積分定数）　…（答）

問2.　$0\leqq x\leqq\frac{1}{t}\pi$ では　$x\sin tx\geqq 0$　　$\frac{1}{t}\pi\leqq x\leqq\frac{2}{t}\pi$ では　$x\sin tx\leqq 0$

よって，問 1 の結果から

$$\int_0^{\frac{2}{t}\pi}|x\sin tx|\,dx=\int_0^{\frac{1}{t}\pi}x\sin tx\,dx-\int_{\frac{1}{t}\pi}^{\frac{2}{t}\pi}x\sin tx\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{t}x\cos tx+\frac{1}{t^2}\sin tx\right]_0^{\frac{1}{t}\pi}-\left[-\frac{1}{t}x\cos tx+\frac{1}{t^2}\sin tx\right]_{\frac{1}{t}\pi}^{\frac{2}{t}\pi}$$

$$=\frac{4}{t^2}\pi$$ 　…（答）

問3.　k が奇数のとき，$\dfrac{k-1}{t}\pi \leqq x \leqq \dfrac{k}{t}\pi$ では $x\sin tx \geqq 0$ であるから

$$I_k(t)=\int_{\frac{k-1}{t}\pi}^{\frac{k}{t}\pi} x\sin tx\,dx=\left[-\frac{1}{t}x\cos tx+\frac{1}{t^2}\sin tx\right]_{\frac{k-1}{t}\pi}^{\frac{k}{t}\pi}=\frac{2k-1}{t^2}\pi \quad \cdots（答）$$

k が偶数のとき，$\dfrac{k-1}{t}\pi \leqq x \leqq \dfrac{k}{t}\pi$ では $x\sin tx \leqq 0$ であるから

$$I_k(t)=\int_{\frac{k-1}{t}\pi}^{\frac{k}{t}\pi} |x\sin tx|\,dx=-\int_{\frac{k-1}{t}\pi}^{\frac{k}{t}\pi} x\sin tx\,dx$$

$$=-\left[-\frac{1}{t}x\cos tx+\frac{1}{t^2}\sin tx\right]_{\frac{k-1}{t}\pi}^{\frac{k}{t}\pi}=\frac{2k-1}{t^2}\pi \quad \cdots（答）$$

問4.　問３の結果より k が偶数，奇数に関係なく　$I_k(t)=\dfrac{2k-1}{t^2}\pi$

ゆえに　$$\int_0^{\frac{2n}{t}\pi}|x\sin tx|\,dx=\sum_{k=1}^{2n}\int_{\frac{k-1}{t}\pi}^{\frac{k}{t}\pi}|x\sin tx|\,dx=\sum_{k=1}^{2n}\frac{2k-1}{t^2}\pi$$

$$=\frac{\pi}{t^2}\left(2\sum_{k=1}^{2n}k-\sum_{k=1}^{2n}1\right)=\frac{\pi}{t^2}\left\{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2n\cdot(2n+1)-2n\right\}$$

$$=\frac{4n^2}{t^2}\pi \quad \cdots（答）$$

受験生へアドバイス

問1.の（多項式）×（三角関数）の形の部分積分，問2.の絶対値付関数の定積分は琉大では頻出である（2017年，2016年，2014年，2011年等）。練習を積んでおくこと。
この問題の類題として，$y=|e^{-x}\sin x|$ の $0\leqq x\leqq n\pi$ 部分と x 軸が囲む部分の面積も他大学では頻出である。対策をしておくとよい。

$\boxed{2}$ 琉大オープン模試 数学 甲 第2問

a は $a\neq 1$ を満たす実数である。関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して

$$f(x)=\left(x^2+ax\int_0^1 f(t)\,dt-1\right)e^x$$

を満たす。

問1.　$k=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$（$k$ は実数）とおくとき、k を a を用いて表せ。

問2.　関数 $f(x)$ が $x=1$ で極値をとるとき，a の値を求めよ。

問3.　a が問2で求めた値のとき，関数 $f(x)$ の極値と，極値をとるときの x の値をすべて求めよ。

解答の方針

問1.　$k=\int_0^1 f(t)\,dt$ （k は実数） とおくと　$f(x)$ は $(x^2+akx-1)e^x$ と表せる。

問2.　$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるためには $f'(1)=0$ が必要。十分条件であることも確かめること。

問3.　問2.で調べた十分条件に注目する。

解答

問1.　$k=\int_0^1 f(t)\,dt$ （k は実数） とおくと　$f(x)=(x^2+akx-1)e^x$

よって　$k=\int_0^1 (t^2+akt-1)e^t dt=\int_0^1 (t^2+akt-1)(e^t)'dt$

$=\left[(t^2+akt-1)e^t\right]_0^1-\int_0^1 (2t+ak)e^t dt=ake+1-\int_0^1 (2t+ak)(e^t)'dt$

$=ake+1-\left[(2t+ak)e^t\right]_0^1+\int_0^1 2e^t dt=ake+1-\{(2+ak)e-ak\}+2(e-1)$

$=ak-1$

ゆえに　$(a-1)k=1$

$a\fallingdotseq 1$ であるから　$k=\dfrac{1}{a-1}$　…（答）

問2.　問1の結果より　$f(x)=\left(x^2+\dfrac{a}{a-1}x-1\right)e^x$　であるから

$f'(x)=\left(x^2+\dfrac{a}{a-1}x-1\right)e^x+\left(2x+\dfrac{a}{a-1}\right)e^x=\left(x^2+\dfrac{3a-2}{a-1}x+\dfrac{1}{a-1}\right)e^x$

$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるから　$f'(1)=0$　が必要

よって　$1+\dfrac{3a-2}{a-1}+\dfrac{1}{a-1}=0$

分母を払って整理すると　$4a-2=0$

したがって　$a=\dfrac{1}{2}$ （$a\fallingdotseq 1$ を満たす）　が必要条件。

このとき　$f(x)=(x^2-x-1)e^x$

$f'(x)=(x^2+x-2)e^x=(x+2)(x-1)e^x$

$f(x)$ の増減表は次のようになり，$f(x)$ は確かに $x=1$ で極値をとるので、 $a=\dfrac{1}{2}$ は十分条件でもある。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって　　$a=\dfrac{1}{2}$　…（答）

問3.　問2の増減表から，$f(x)$ は

$x=-2$ のとき極大値 $\dfrac{5}{e^2}$，

$x=1$　のとき極小値 $-e$　をとる。　…（答）

受験生へアドバイス

問1.の定積分を含む関数の問題は，この問題のように $=k$(定数) とおくタイプのほかに，両辺を x で微分するタイプもある（2015年大問1など）。対策をしておくこと。

問2.の極値をもつ条件では，必要条件だけでなく十分条件であることも調べる必要がある。理解しておくこと。

$\boxed{3}$ 琉大オープン模試 数学 甲 第3問

絶対値が1で偏角が θ の複素数 を z とし，n を正の整数とする。

問1.　z を極形式で表せ。

問2.　$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$　が成り立つことを，三角関数の加法定理を用いて数学的帰納法で証明せよ。

問3.　$|1-z^2|$ を θ の式で表せ。

問4.　z についての恒等式 $1-z^n=(1-z)(1+z+\cdots z^{n-1})$ を用いることで，$\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta$　の値を求めよ。

解答の方針

問1.　z の絶対値と偏角に注目する。

問2.　加法定理を逆方向に使うのがポイント。

問3.　半角の公式 $\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}=sin^2\theta$ がポイント。

問4.　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta$ は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z^{2k}=z^2+z^4+\cdots+z^{2n}$ の虚部であるから、問3.の式からいかにして　$z^2+z^4+\cdots+z^{2n}$　を導くかを考える。

解答

問1.　z は絶対値が1で偏角が θ の複素数であるから　　$z=\cos\theta+i\sin\theta$　…（答）

問2.　$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$　……(A) を数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

(A) で $n=1$ とおくと　問1より　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ は成り立つ。

よって，(A) は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定する。

すなわち　　$z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$

$n=k+1$ のとき

$$
\begin{aligned}
z^{k+1}=z^k z&=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\
&=(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)\\
&=\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta
\end{aligned}
$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) は成り立つ。

[1], [2] から，すべての正の整数 n について (A) は成り立つ。■

問3.　
$$
\begin{aligned}
|1-z^2|&=|1-(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)|=|(1-\cos 2\theta)-i\sin 2\theta|\\
&=\sqrt{(1-\cos 2\theta)^2+\sin^2 2\theta}=\sqrt{2(1-\cos 2\theta)}\\
&=\sqrt{2\cdot 2\sin^2\theta}=\sqrt{4\sin^2\theta}\\
&=2|\sin\theta|\quad\cdots（答）
\end{aligned}
$$

問4.　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta$ は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z^{2k}$ の虚部である。

$z\fallingdotseq\pm1$ のとき，z についての恒等式

$$1-z^n=(1-z)(1+z+\cdots z^{n-1})$$

において z を z^2 に置き換えても成り立つので、

$$1-z^{2n}=(1-z^2)(1+z^2+\cdots z^{2n-2})$$

$z\fallingdotseq\pm1$ であるから

$$1+z^2+\cdots z^{2n-2}=\frac{1-z^{2n}}{1-z^2}$$

両辺に z^2 をかけることで

$$z^2+z^4+\cdots z^{2n}=\frac{z^2(1-z^{2n})}{1-z^2}$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}z^{2k}=\frac{z^2(1-z^{2n})}{1-z^2}=\frac{(z^2-z^{2n+2})(1-\overline{z}^2)}{|1-z^2|^2}=\frac{z^2-1+z^{2n}-z^{2n+2}}{4\sin^2\theta}\quad\cdots\cdots①$$

① の分子の $z^2-1+z^{2n}-z^{2n+2}$ について，虚部は

$$
\begin{aligned}
&\sin 2\theta+\sin 2n\theta-\sin(2n+2)\theta\\
&=\sin 2\theta+\sin 2n\theta-\sin 2(n+1)\theta\\
&=2\sin(n+1)\theta\cos(n-1)\theta-2\sin(n+1)\theta\cos(n+1)\theta\\
&=2\sin(n+1)\theta\{\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta\}=4\sin(n+1)\theta\sin n\theta\sin\theta
\end{aligned}
$$

① より

$$\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta=\frac{4\sin(n+1)\theta\sin n\theta\sin\theta}{4\sin^2\theta}=\frac{\sin(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin\theta}$$

また，$z=\pm 1$ のとき，z^{2k} は実数であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta=0$$

以上より，$z \fallingdotseq \pm 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta=\frac{\sin(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin\theta}$,

$z=\pm 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta=0$ …（答）

受験生へアドバイス

数学的帰納法は，琉大では頻出である（2020年大問3，2018年大問2等）。複素数の計算に慣れるのは当然のこととして，琉大数学では三角関数の公式を使うことがかなり多い。十分に練習すること。

$\boxed{4}$ 琉大オープン模試 数学 甲 第4問

サイコロを繰り返し投げることにより，A，B の2人が次の規則に従ってゲームを行う。

規則 1. ゲーム開始時，A，B 両者の持ち点はともに 0 点とする。

規則 2. 1個のサイコロを投げた結果により，両者の持ち点を次のように変化させる。

(イ) A，B の持ち点が同じとき，奇数の目が出たら A の持ち点だけを 1 点増やし，偶数の目が出たらBの持ち点だけを 1 点増やす。

(ロ) A，B の持ち点が異なるとき，奇数の目が出たら持ち点の少ない人の持ち点だけを 1 点増やし，偶数の目が出たら A，B 両者の持ち点をともに 1点 増やす。

このとき，n 回サイコロを投げた結果，A，B の持ち点が等しくなっている確率を P_n とする。ただし，サイコロを投げたとき各目の出方は等しいものとする。

問1. P_1，P_2 を求めよ。

問2. n を自然数とするとき，P_{n+1} を P_n で表せ。

問3. n を自然数とするとき，P_n を n で表せ。

解答の方針

問1. 1回目，2回目とサイコロを投げた時の様子を樹形図に書き出してみるとよい。

問2. n 回サイコロを投げた後は2人の持ち点は同じか、または異なるかのいずれかである。それぞれの場合について，$n+1$ 回目にどのような目が出れば2人の持ち点が等しくなるかを考える。

問3. 基本的な隣接2項間漸化式であるので，その解法を考える。

解答

問1.　規則1と2(イ)より，サイコロを1回投げたとき，奇数が出ても偶数が出ても，A，B どちらかが1点多くなるから　　$P_1=0$　…（答）

これと規則2(ロ)より，サイコロを2回投げたとき持ち点が同じになるには，2回目に奇数の目が出ればよいから　　$P_2=\dfrac{1}{2}$　…（答）

問2.　規則から，2人の持ち点は同じであるか，1点差であるかのいずれかである。

サイコロを n 回投げた結果，持ち点が同じであれば，規則2(イ)より，$(n+1)$ 回目に投げた後に持ち点が同じになることはない。

持ち点が1点差であれば，規則2(ロ)より，$(n+1)$ 回目に奇数の目が出れば，持ち点が同じになる。

したがって

$$P_{n+1}=P_n\times 0+(1-P_n)\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots ①\quad\cdots（答）$$

問3.　① を変形すると

$$P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$$

よって，数列 $\left\{P_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $P_1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ゆえに　　$P_n=-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$　…（答）

受験生へアドバイス

確率の漸化式は2018年より3年連続で出題されているので要注意である。琉大の確率の問題は一見すると難しい問題が多いように見えるが，樹形図を描いたりして丁寧に場合分けしていくと解ける問題が多い。普段から場合分けの訓練をしておくとよい。