2022琉大オープン模試　数学(乙)

$\boxed{1}$

問１　10進数の数2021を２進数で表すと何桁になるか。

問２　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ と $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$ を満たすとき、内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

問３　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式　$\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}=2\sin 2\theta$　を解け。

問４　不等式　$9\log_8 2x<2(\log_2 x)^2+1$　を解け。

解説

問１　$2^{10}=1024$,　$2^{11}=2028$　であるから

$$2^{10}<2021<2^{11}$$

ここで 2^{10}, 2^{11} を２進数で表すと，それぞれ11桁、12桁 の最小の数であるから

2021を２進数で表すと　11桁　…　(答)

（別解）

２進数で表すと　11111100101　よって１１桁

問２　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ から　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$　……①

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$ から　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3$　……②

①−② から　$4\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　…　(答)

問３　$\tan\theta$ の定義域と $\cos\theta\fallingdotseq 0$ から　$\theta\fallingdotseq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$　……①

与えられた方程式から　$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=2\cdot 2\sin\theta\cos\theta$

変形すると　$\sin\theta+1=4\sin\theta\cos^2\theta$

$$4\sin\theta(1-\sin^2\theta)-(\sin\theta+1)=0$$

$$(\sin\theta+1)\{4\sin\theta(1-\sin\theta)-1\}=0$$

$$(\sin\theta+1)(4\sin^2\theta-4\sin\theta+1)=0$$
$$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)^2=0$$

よって　　$\sin\theta=-1$ または $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ または $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

このうち，① を満たす θ は　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$　…　(答)

問４　真数は正であるから　　$x>0$　……①

$\log_2 x=t$ とおくと　　$\log_8 2x=\dfrac{\log_2 2x}{\log_2 8}=\dfrac{1+\log_2 x}{3}=\dfrac{1+t}{3}$

このとき，与えられた不等式から

$$3(1+t)<2t^2+1$$

整理すると　　$2t^2-3t-2>0$

$$(2t+1)(t-2)>0$$
$$\therefore\quad t<-\frac{1}{2},\ 2<t$$

すなわち　$\log_2 x<-\dfrac{1}{2}$，$2<\log_2 x$

底 2 は 1 より大きいから　　$x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$4<x$　……②

①，② の共通範囲を求めて　　$0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$4<x$　…　(答)

2

点 P から放物線 C：$y=x^2$ へ互いに直交する 2 本の接線が引けるとする。その接点を A$(s,\ s^2)$，B$(t,\ t^2)$ (ただし $s<t$) とするとき，次の問いに答えよ。

問１　点Aにおける放物線C の接線の方程式を求めよ。

問２　s を t の式で表せ。

問３　放物線Cと線分 PA，PB で囲まれる図形の面積 S を t の式で表せ。

問４　面積 S の最小値を求めよ。

(解説)

問１　$y=x^2$ から　　$y'=2x$

よって，A$(s,\ s^2)$ における接線の方程式は

$$y-s^2=2s(x-s)$$

すなわち　　$y=2sx-s^2$　…　(答)

問２　同様にして，B$(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y=2tx-t^2$$

この２本の接線が直交するから

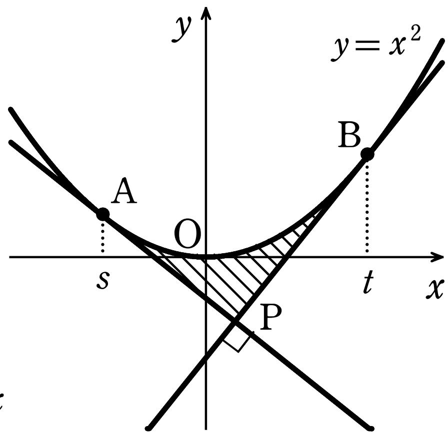
$$2s\times 2t=-1 \quad \cdots \quad ①$$

ここで $t=0$ と仮定すると点Bにおける接線の方程式は $y=0$ となり，これに垂直な放物線Cの接線は存在しないので，矛盾が生じる。

よって，$t\fallingdotseq 0$ であるから①より

$$s=-\frac{1}{4t} \quad \cdots \quad (答)$$

問３　点Pの x 座標は，方程式 $2sx-s^2=2tx-t^2$ の解である。



変形すると　　$2(s-t)x=s^2-t^2$

$s\fallingdotseq t$ であるから　　$x=\dfrac{s+t}{2}$

したがって

$$S=\int_s^{\frac{s+t}{2}}\{x^2-(2sx-s^2)\}dx+\int_{\frac{s+t}{2}}^{t}\{x^2-(2tx-t^2)\}dx$$

$$=\int_s^{\frac{s+t}{2}}(x^2-2sx+s^2)\,dx+\int_{\frac{s+t}{2}}^{t}(x^2-2tx+t^2)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-sx^2+s^2x\right]_s^{\frac{s+t}{2}}+\left[\frac{x^3}{3}-tx^2+t^2x\right]_{\frac{s+t}{2}}^{t}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{s+t}{2}\right)^3-s\left(\frac{s+t}{2}\right)^2+s^2\left(\frac{s+t}{2}\right)-\frac{s^3}{3}+s^3-s^3$$

$$+\frac{t^3}{3}-t^3+t^3-\frac{1}{3}\left(\frac{s+t}{2}\right)^3+t\left(\frac{s+t}{2}\right)^2-t^2\left(\frac{s+t}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(t^3-s^3)+\frac{1}{4}(t-s)(s+t)^2-\frac{1}{2}(t^2-s^2)(s+t)$$

$$=\frac{1}{12}(t-s)\{4(t^2+st+s^2)+3(s+t)^2-6(s+t)^2\}$$

$=\dfrac{1}{12}(t-s)(t^2-2st+s^2)=\dfrac{1}{12}(t-s)^3$

$=\dfrac{1}{12}\left(t+\dfrac{1}{4t}\right)^3$　　… (答)（問２の結果から）

面積計算の別解：$\displaystyle\int(x+a)^n dx=\frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+C$（数Ⅲ）を用いると，

$$S=\int_s^{\frac{s+t}{2}}\{x^2-(2sx-s^2)\}dx+\int_{\frac{s+t}{2}}^t\{x^2-(2tx-t^2)\}dx$$

$$=\int_s^{\frac{s+t}{2}}(x-s)^2dx+\int_{\frac{s+t}{2}}^t(x-t)^2dx=\left[\frac{(x-s)^3}{3}\right]_s^{\frac{s+t}{2}}+\left[\frac{(x-t)^3}{3}\right]_{\frac{s+t}{2}}^t$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{t-s}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{s-t}{2}\right)^3=\frac{1}{12}(t-s)^3=\frac{1}{12}\left(t+\frac{1}{4t}\right)^3$$

問４　$s=-\dfrac{1}{4t}$ より，s と t は異符号であり，$s<t$ であるから　$t>0$

よって　$\dfrac{1}{4t}>0$

したがって，相加平均・相乗平均の関係により

$$S=\frac{1}{12}\left(t+\frac{1}{4t}\right)^3\geqq\frac{1}{12}\left(2\sqrt{t\cdot\frac{1}{4t}}\right)^3=\frac{1}{12}$$

等号は $t=\dfrac{1}{4t}$，$t>0$ すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ。

したがって，S の最小値は　$\dfrac{1}{12}$　… (答)