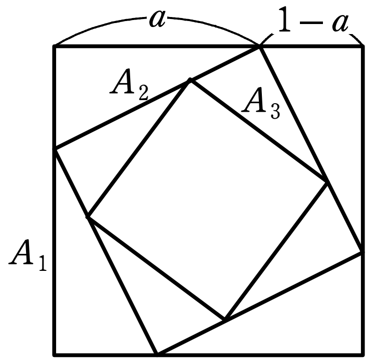
2022琉大オープン模試　数学(甲)

1

1辺の長さが1の正方形 A_1 がある。A_1 の各辺を，時計回りにそれぞれ $a:(1-a)$ $(0<a<1)$ に内分する点を結んでできる正方形を A_2 とする。同様の手続きで，正方形 A_k から正方形 A_{k+1} を作る $(k=1, 2, \cdots\cdots)$。正方形 A_k の面積を S_k とするとき，次の問いに答えよ。



問１　S_2 を a の式で表せ。

問２　S_k を k と a の式で表せ。

問３　無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ が収束することを示し，その和 S を a の式で表せ。

問４　S を最小にする a を求めよ。

(解説)

問１　正方形 A_k の一辺の長さを x_k とする。

三平方の定理より

$$x_2=\sqrt{a^2+(1-a)^2}$$
$$=\sqrt{2a^2-2a+1}$$

よって

$$S_2={x_2}^2=2a^2-2a+1$$

問２　正方形 A_k と A_{k+1} について，問１と同様三平方の定理から

$$x_{k+1}=\sqrt{(ax_k)^2+\{(1-a)x_k\}^2}=\sqrt{2a^2-2a+1}\cdot x_k$$

ゆえに A_k と A_{k+1} の相似比は　$1:\sqrt{2a^2-2a+1}$　だから

面積比は　$S_k:S_{k+1}=1:2a^2-2a+1$

よって数列 $\{S_k\}$ は，初項 $S_1=1$　公比 $2a^2-2a+1$ の等比数列である。

したがって

$$S_k=1\cdot(2a^2-2a+1)^{k-1}$$
$$=(2a^2-2a+1)^{k-1}$$

問３　問２より $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ は，初項１，公比 $2a^2-2a+1$ の無限等比級数である。

ここで公比について

$$2a^2-2a+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$0<a<1$ より　$\frac{1}{2}<2a^2-2a+1<1$

したがって、無限等比級数$\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ は収束し、その和は

$$S=\frac{1}{1-(2a^2-2a+1)}$$
$$=\frac{1}{2a-2a^2}$$

問４　$S=\dfrac{1}{2a-2a^2}$ よりS は，分母が最大となるとき，最小値をとる。

$$分母=2a-2a^2=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$0<a<1$ より、分母は $a=\dfrac{1}{2}$ で最大値をとる。

よって，S を最小にする a の値は　$a=\dfrac{1}{2}$

2

xy 平面上の２曲線 C_1：$y=\dfrac{\log x}{x}$ と C_2：$y=ax^2$ は点 P を共有し，P において共通の接線をもっている。ただし，a は定数とする。

問１　関数 $y=\dfrac{\log x}{x}$ の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，C_1 の概形をかけ。

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ は証明なしに用いてよい。

問２　P の座標および a の値を求めよ。

問３　不定積分 $\displaystyle\int\left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx$ を求めよ。

問４　C_1，C_2 および x 軸で囲まれる部分を，x 軸の周りに１回転してできる立体の体積 V を求めよ。

解説

問１　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f(x)$ の定義域は　$x>0$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-1-2(1-\log x)}{x^3} = \frac{2\log x - 3}{x^3}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$\log x = 1$　　よって　　$x = e$

$f''(x)=0$ とすると　　$\log x = \dfrac{3}{2}$　　よって　　$x = e\sqrt{e}$

よって，$f(x)$ の増減，グラフの凹凸は次のようになる。

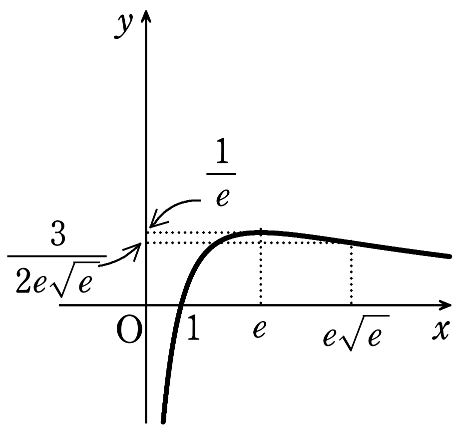
x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$ 極大	↘	$\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$ 変曲点	↘

また，$t = \dfrac{1}{x}$ とおくと　$x \longrightarrow +0$ のとき　$t \longrightarrow \infty$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{\log x}{x} = \lim_{t \to \infty} t(-\log t) = -\infty$

このことと，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることから，2 直線 $x=0$，$y=0$ は漸近線である。

以上から，曲線 C_1 の概形は右の図のようになる。



問２　$g(x) = ax^2$ とすると　　$g'(x) = 2ax$

点 P の x 座標を p（$p>0$）とすると，C_1 と C_2 は点 P を共有し，P において共通の接線をもつので

$f(p) = g(p)$ かつ $f'(p) = g'(p)$

$f(p) = g(p)$ から　　$\dfrac{\log p}{p} = ap^2$　　…… ①

また　$f'(p) = g'(p)$ から　　$\dfrac{1-\log p}{p^2} = 2ap$

両辺に $\dfrac{p}{2}$ を掛けて　　$\dfrac{1-\log p}{2p} = ap^2$　…… ②

①，② から　　$\dfrac{\log p}{p} = \dfrac{1-\log p}{2p}$

よって　　$\log p = \dfrac{1}{3}$

ゆえに　　$p = \sqrt[3]{e}$

このとき　$f(\sqrt[3]{e})=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{e}}$

よって，点Ｐの座標は　$\left(\sqrt[3]{e},\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{e}}\right)$

$p=\sqrt[3]{e}$ を ① に代入して　$\dfrac{1}{3\sqrt[3]{e}}=a\cdot\sqrt[3]{e^2}$

ゆえに　$a=\dfrac{1}{3e}$

（別解）

$y=f(x)$ の 点Ｐにおける接線の方程式は

$$y=\frac{1-\log p}{p^2}(x-p)+\frac{\log p}{p}$$

$$=\frac{1-\log p}{p^2}x-\frac{1}{p}+\frac{2\log p}{p}$$

また，$y=g(x)$ の 点Ｐにおける接線の方程式は

$$y=2ap(x-p)+ap^2$$

$$=2apx-ap^2$$

係数を比較して

$$\frac{1-\log p}{p^2}=2ap,\qquad -\frac{1}{p}+\frac{2\log p}{p}=-ap^2$$

を解いてもよい

問３　$\displaystyle\int\left(\frac{\log x}{x}\right)^2dx=\int\left(-\frac{1}{x}\right)'(\log x)^2dx$

$$=-\frac{1}{x}(\log x)^2+\int\frac{1}{x}\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{x}(\log x)^2+2\int\left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx$$

$$=-\frac{1}{x}(\log x)^2-\frac{2}{x}\log x+2\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{x}(\log x)^2-\frac{2}{x}\log x-\frac{2}{x}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

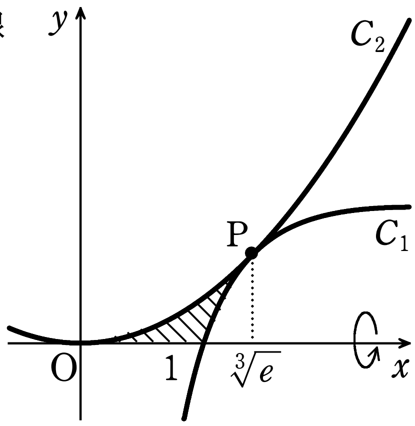
（別解）

$\log x=t$ とおくと

$x=e^t$ と $\dfrac{1}{x}dx=dt$ から

$\displaystyle\int\left(\frac{\log x}{x}\right)^2dx=\int\frac{t^2}{e^t}dt=\int t^2e^{-t}dt$ を部分積分してもよい

問４　曲線 C_1，C_2 と x 軸で囲まれる部分は，右の図の斜線部分のようになるから



$$V=\pi\int_0^{\sqrt[3]{e}}\left(\frac{1}{3e}x^2\right)^2dx-\pi\int_1^{\sqrt[3]{e}}\left(\frac{\log x}{x}\right)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{9e^2}\int_0^{\sqrt[3]{e}}x^4dx-\pi\int_1^{\sqrt[3]{e}}\left(\frac{\log x}{x}\right)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{9e^2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[3]{e}}-\pi\left[-\frac{1}{x}(\log x)^2-\frac{2}{x}\log x-\frac{2}{x}\right]_1^{\sqrt[3]{e}}$$

$$=\frac{\pi}{9e^2}\cdot\frac{e\sqrt[3]{e^2}}{5}+\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{\sqrt[3]{e}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{\sqrt[3]{e}}-2\right)$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}+2\right)\frac{1}{\sqrt[3]{e}}-2\right\}\pi$$

$$=\left(\frac{14}{5\sqrt[3]{e}}-2\right)\pi$$

３

$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とする．ただし，i は虚数単位である．

100 個の複素数 z_1，z_2，……，z_{100} を $z_1=\alpha$，$z_n=z_{n-1}{}^3$ $(n=2$，……，$100)$ で定める．

問１　z_5 を α を用いて表せ．

問２　$z_n=\alpha$ となるような n の個数を求めよ．

問３　$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}z_n$ の値を求めよ．

（解説）

問１　$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ であるから，ド･モアブルの定理より

$$\alpha^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

よって　$z_2=\alpha^3$,

$$z_3=(\alpha^3)^3=\alpha^9=\alpha^5\cdot\alpha^4=\alpha^4,$$

$$z_4=(\alpha^4)^3=\alpha^{12}=(\alpha^5)^2\cdot\alpha^2=\alpha^2$$

$$\therefore\quad z_5=(\alpha^2)^3=\alpha^6=\alpha^5\alpha=\alpha$$

問２　$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ であるから，α，α^2，α^3，α^4 は互いに相異なる．

問 1 の途中過程より z_n は 4 を周期として α，α^3，α^4，α^2 をくり返す。

よって　$z_n=\alpha$ となる n は　$n=4l-3$ (l は自然数)　と表せて

$1\leqq n\leqq 100$ から　$1\leqq l\leqq 25$　　よって　25 個

問３　問2の考えから，z_n は α，α^3，α^4，α^2 の値を繰り返しとる.

よって

$$\sum_{n=1}^{100} z_n=\sum_{l=1}^{25}(\alpha+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^2)=25(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)$$

ここで，$\alpha^5=1$ より　$\alpha^5-1=0$ であるから

$$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$$

$\alpha\fallingdotseq 1$ であるから　$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

すなわち　$\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=-1$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{n=1}^{100} z_n=25\cdot(-1)=-25$

$\boxed{4}$

1 から n までの数字がもれなく 1 つずつ書かれた n 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引く。このとき，引いたカードの数字のうち小さい方が 3 の倍数である確率を $p(n)$ とする。

問 1　$p(8)$ を求めよ。

問 2　正の整数 k に対し，$p(3k+2)$ を k で表せ。

(解説)

引いた 2 枚のカードの数字を a，b $(a<b)$ とする。

問 1　8 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引くとき，その引き方は

$${}_8\mathrm{C}_2=28 \text{ (通り)}$$

だけあり，これらは皆同様に確からしい。

これらのうち a が 3 の倍数となるのは，$a=3$，6 のときで，それぞれの場合における b の値は

$a=3$ のとき　　$b=4$，5，6，7，8

$a=6$ のとき　　$b=7$，8

ゆえに a が 3 の倍数となるのは 7通りある。

よって求める確率は

$$p(8)=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

問２　$3k+2$ 枚のカードの束から同時に２枚のカードを引くとき，その引き方は

$${}_{3k+2}\mathrm{C}_2=\frac{(3k+2)(3k+1)}{2}\ (\text{通り})$$

だけあり，これらは皆同様に確からしい。

これらのうち a が３の倍数となるのは，$a=3n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$ のときで，このとき b はそれぞれ $3n+1$，……，$3k+1$，$3k+2$ の $3k+2-3n$ 通りある。

ゆえに，その総数は

$$(3k-1)+\cdots\cdots+5+2=\frac{k(3k-1+2)}{2}=\frac{k(3k+1)}{2}\ (\text{通り})$$

よって求める確率は

$$p(3k+2)=\frac{k(3k+1)}{2}\cdot\frac{2}{(3k+2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+2}$$