2023　琉大　乙型

1 問1　$2023x+374y=17$

の両辺を 17 で割ることで，

$119x+22y=1$　…①

ここで，

$9=119-22\cdot5$

$4=22-9\cdot2$

$1=9-4\cdot2$　より

$$\begin{aligned}1&=9-4\cdot2\\&=9-(22-9\cdot2)\cdot2\\&=9\cdot5-22\cdot2\\&=(119-22\cdot5)\cdot5-22\cdot2\\&=119\cdot5+22\cdot(-27)\end{aligned}$$

よって　$119\cdot5+22\cdot(-27)=1$

であるから，① すなわち　$2023x+374y=17$　を満たす整数 x，y の組の一つは

$(x,\ y)=(5,\ -27)$　…（答）

問2　1段目，2段目，… の小三角形の個数を並べた数列を $\{a_n\}$ とすると，

数列 $\{a_n\}$ は初項1，公差2の等差数列なので，その一般項は

$a_n=2n-1$　… ①

100段目までの小三角形の総数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100}a_k&=\sum_{k=1}^{100}(2k-1)\\&=\frac{1}{2}\cdot100\cdot(1+199)\\&=10000\quad\cdots\text{（答）}\end{aligned}$$

ここで，k が自然数のとき，①より，

$$\begin{cases}a_{3k-2}=6k-5=3(2k-2)+1\\a_{3k-1}=6k-3=3(2k-1)\\a_{3k}=6k-1=3(2k-1)+2\end{cases}\quad\cdots(*)$$

n 段目の白色小三角形は，左から，1，4，7，10，… 番目に現れるので，

1段目，2段目，… の白色の小三角形の個数を並べた数列を $\{b_n\}$ とすると，

（＊）より，

$$\begin{cases}b_{3k-2}=2k-2+1=2k-1\\b_{3k-1}=2k-1\\b_{3k}=2k-1+1=2k\end{cases}$$

$b_{3k-2}+b_{3k-1}+b_{3k}=6k-2$

よって，100 段目までの白色小三角形の総数は

$$\sum_{l=1}^{100} b_l = \sum_{k=1}^{33}(b_{3k-2}+b_{3k-1}+b_{3k})+b_{100}$$

$$=\sum_{k=1}^{33}(6k-2)+b_{3\cdot 34-2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 33\cdot(4+196)+67$$

$$=3300+67$$

$$=3367 \quad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$ 問1　$f(x)=x^3+x^2$ より

$f'(x)=3x^2+2x$

$\quad=x(3x+2)$

$f'(x)=0$ とおくと，$x=-\dfrac{2}{3}$，0　をとる。

$f(x)$ の増減表は次のようになる

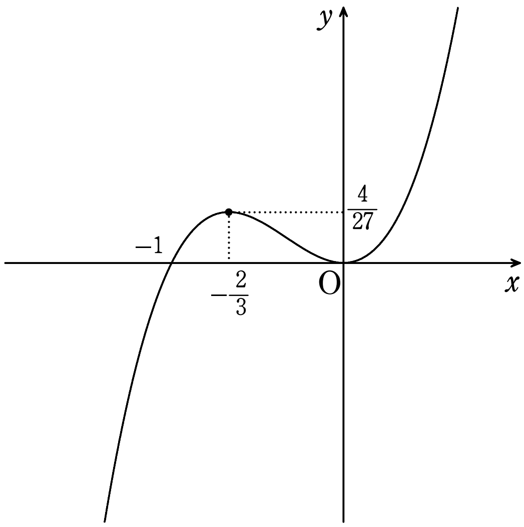
x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は，

$x=-\dfrac{2}{3}$ のとき，極大値　$f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$

$x=0$ のとき，極小値　$f(0)=0$　をとる。

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる



問２　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a^2(x+1)$ との共有点の x 座標は

$x^3+x^2=a^2(x+1)$　より

$x^2(x+1)-a^2(x+1)=0$

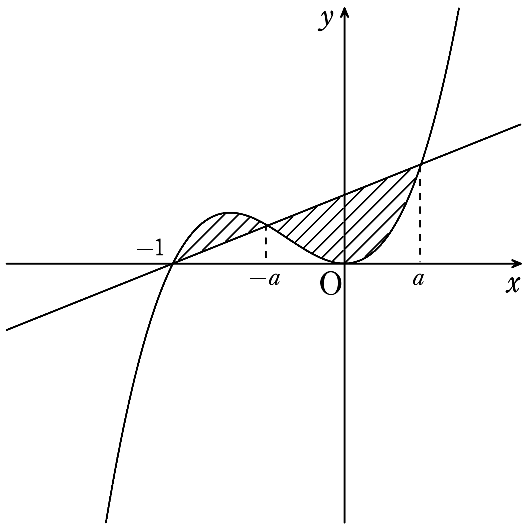
$(x+1)(x^2-a^2)=0$

$(x+1)(x+a)(x-a)=0$

$x=-1,\ \pm a$

ここで，$0<a<1$ のとき，

$-1<-a<0<a<1$ だから，$S(a)$ は右図の斜線部の面積であるので



$$S(a)=\int_{-1}^{-a}\{x^3+x^2-a^2(x+1)\}\,dx+\int_{-a}^{a}\{a^2(x+1)-(x^3+x^2)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{-a}(x^3+x^2-a^2x-a^2)\,dx+\int_{-a}^{a}(-x^3-x^2+a^2x+a^2)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{-a}(x^3+x^2-a^2x-a^2)\,dx+2\int_{0}^{a}(-x^2+a^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{a^2}{2}x^2-a^2x\right]_{-1}^{-a}+2\left[-\frac{1}{3}x^3+a^2x\right]_{0}^{a}$$

$$=-\frac{1}{4}a^4+2a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{12}\qquad\cdots（答）$$

問３　問２より，

$S'(a)=-a^3+6a^2-a$

$\quad=-a(a^2-6a+1)$

$S'(a)=0$ のとき，$0<a<1$ より

$a=3-2\sqrt{2}$

$0<a<1$ における $S(a)$ の増減表は次の通り

a	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	/	$-$	0	$-$	/
$S(a)$	/	↘	最小	↗	/

よって，$S(a)$ を最小にする a の値は　$a=3-2\sqrt{2}$　　$\cdots$（答）