1 問１　$y=\dfrac{1}{x^a}=x^{-a}$ より

$$y'=-ax^{-a-1}$$

$x=1$ のとき

$$y'=-a\cdot 1^{-a-1}=-a$$

なので，点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式は

$$y-1=-a(x-1)$$

$$y=-ax+a+1$$

この式で $y=0$ とすると

$$ax=a+1$$

$a>0$ なので $x=\dfrac{a+1}{a}=1+\dfrac{1}{a}$

よって，$\mathrm{A}\left(1+\dfrac{1}{a},\ 0\right)$

また，$x=0$ とすると，$y=a+1$

よって，$\mathrm{B}(0,\ a+1)$

$1+\dfrac{1}{a}>0$，$a+1>0$ だから

$$S(a)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right)(a+1)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}+2\right)\quad\cdots(答)$$

問２　問１の結果より，$a>0$ のとき，

相加平均と相乗平均の大小関係を用いると

$$S(a)=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}+2\right)$$

$$\geqq\frac{1}{2}\left(2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}+2\right)$$

$$=2$$

上の不等式の等号は，$a=\dfrac{1}{a}$　すなわち $a^2=1$

よって，$a=1$（$a>0$ より）のとき確かに成立する。

よって，$S(a)$ は，$a=1$ のとき，最小値２をとる。　…(答)

2 問１ (i) $x \geqq 0$ のとき

$$f(x) = xe^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$= e^{-x}(1-x)$$

$f'(x)=0$ をとくと，$x=1$ であるから

増減表は以下のようになる

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘

また，条件より $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$

(ii) $x < 0$ のとき

$$f(x) = xe^{x}$$

$$f'(x) = e^{x} + xe^{x}$$

$$= e^{x}(1+x)$$

$f'(x)=0$ をとくと，$x=-1$ であるから

増減表は以下のようになる。

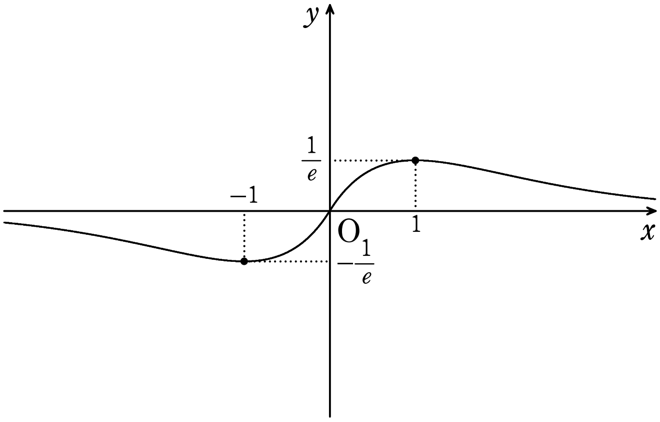
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$	/
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	0

また，$x=-t$ とおくと

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = \lim_{t\to\infty}(-t)e^{-t}$$

$$= -\lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$$

(i), (ii)より，グラフは



問２ $x \geqq 0$ のとき，２つの関数の交点の x 座標は

$xe^{-x}=ax$

$x(e^{-x}-a)=0$

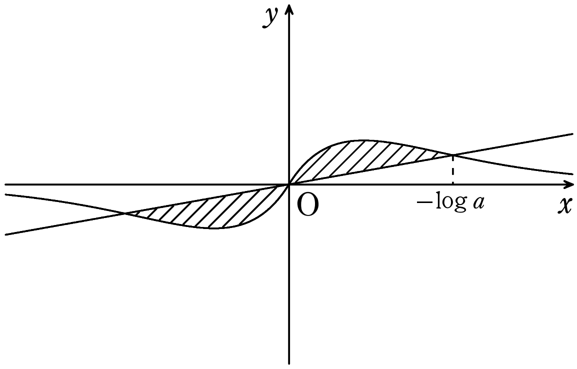
$x=0$　または　$e^{-x}=a$

すなわち，$x=0$，$-\log a$

条件より，

$0<a<1$ であるから $\log a<\log 1$

すなわち，$\log a<0$　　$-\log a>0$



ここで，

$$\int xe^{-x}\,dx=\int x\cdot(-e^{-x})'\,dx$$

$$=-xe^{-x}-\int(-e^{-x})\,dx$$

$$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$$

$$=-e^{-x}(x+1)+C$$　（C は積分定数）

グラフより，$x\geqq 0$ での面積は

$$\int_0^{-\log a}(xe^{-x}-ax)\,dx=\left[-e^{-x}(x+1)-\frac{1}{2}ax^2\right]_0^{-\log a}$$

$$=-e^{\log a}(-\log a+1)-\frac{1}{2}a(-\log a)^2+1$$

$$=a(\log a-1)-\frac{1}{2}a(\log a)^2+1$$

ここで，$f(x)=-f(-x)$，$g(x)=-g(-x)$ であるから 2 つの関数は共に原点対称である。

したがって，$x\leqq 0$ での面積は $x\geqq 0$ での面積に等しいので求める面積は，

$2a(\log a-1)-a(\log a)^2+2$　…（答）

$\boxed{3}$ 問１　時刻 t における点Ｐ，Ｑ，Ｒの座標はそれぞれ

$$P(t,\ 0,\ 0),\ Q\left(0,\ \frac{1}{2}t,\ 0\right)$$

$$\begin{cases} 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき，} R(0,\ 0,\ 2t) \\ \dfrac{1}{2} < t \leqq 1 \text{ のとき，} R(0,\ 0,\ 2-2t) \end{cases}$$

（ｉ）　$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$\overrightarrow{PQ}=\left(-t,\ \dfrac{1}{2}t,\ 0\right)$，　$\overrightarrow{PR}=(-t,\ 0,\ 2t)$　であるから

$|\overrightarrow{PQ}|^2=\dfrac{5}{4}t^2$，　$|\overrightarrow{PR}|^2=5t^2$，　$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=t^2$

$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}t^2\cdot 5t^2-t^4}$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{4}t^2$$

（ii）　$\dfrac{1}{2} < t \leqq 1$ のとき

$\overrightarrow{PQ}=\left(-t,\ \dfrac{1}{2}t,\ 0\right)$，　$\overrightarrow{PR}=(-t,\ 0,\ 2-2t)$　であるから

$|\overrightarrow{PQ}|^2=\dfrac{5}{4}t^2$，　$|\overrightarrow{PR}|^2=5t^2-8t+4$，　$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=t^2$

$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}t^2(5t^2-8t+4)-t^4}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{21t^4-40t^3+20t^2}$$

以上，（ｉ），（ii）より

$$S(t)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{21}}{4}t^2 & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{1}{4}\sqrt{21t^4-40t^3+20t^2} & \left(\dfrac{1}{2} < t \leqq 1\right) \end{cases}$$　…（答）

問２　（ｉ）　$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$S(t)=\dfrac{\sqrt{21}}{4}t^2$　より，

$S(t)$ は単調に増加し，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{\sqrt{21}}{16}$ をとる。

（ii）　$\dfrac{1}{2} < t \leqq 1$ のとき

$$S(t)=\frac{1}{4}\sqrt{21t^4-40t^3+20t^2}$$

ここで，$f(t)=21t^4-40t^3+20t^2$ とおくと

$$f'(t)=84t^3-120t^2+40t$$
$$=4t(21t^2-30t+10)$$

$\frac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき，$f'(t)=0$ とおくと

$$21t^2-30t+10=0$$
$$t=\frac{15\pm\sqrt{15}}{21}$$

また $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{16}$，$f(1)=1$ より

$\frac{1}{2}<t\leqq 1$ における $f(t)$，および $S(t)$ の増減表は次の通り

t	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{15-\sqrt{15}}{21}$	$\cdots$	$\frac{15+\sqrt{15}}{21}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\left(\frac{21}{16}\right)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	1
$S(t)$	$\left(\frac{\sqrt{21}}{16}\right)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$

ここで，$\frac{21}{16}>1$ であることから，$S(t)$ は $t=\frac{15-\sqrt{15}}{21}$ で最大値をとる。

以上，(ｉ)，(ii)より，$S(t)$ を最大にする t の値は $t=\frac{15-\sqrt{15}}{21}$　…（答）

4 問1　$k+1$ 回目に2回目の6の目が出るのは，k 回目までで6の目がちょうど1回出て $k+1$ 回目にも6の目が出るときである。よって，求める確率 p_k は

$$p_k = {}_k\mathrm{C}_1\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{k\cdot 5^{k-1}}{6^{k+1}} \quad \cdots（答）$$

問2　$\dfrac{p_{k+1}}{p_k} = \dfrac{(k+1)5^k}{6^{k+2}} \times \dfrac{6^{k+1}}{k\cdot 5^{k-1}} = \dfrac{5(k+1)}{6k}$

$k=1，2，3，\cdots$ であるから，$p_k>0$ となるので，

$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$ すなわち　$p_k<p_{k+1}$ となるのは，

$$\frac{5(k+1)}{6k}>1$$

$k>0$ より　　$5(k+1)>6k$

$$k<5$$

したがって　　$k=1，2，3，4$ のときである。

同様に考えると，

$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}=1$ すなわち　$p_k=p_{k+1}$ となるのは　　$k=5$ のとき。

$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}<1$ すなわち　$p_k<p_{k+1}$ となるのは　　$k=6，7，8，\cdots$ のとき。

以上より，

$$p_1<p_2<p_3<p_4<p_5=p_6>p_7>p_8>\cdots$$

となるので，p_k を最大にする k の値は

$k=5，6$　$\cdots$（答）

問3　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot 5^{k-1}}{6^{k+1}} = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

$$36S_n = 1+2\cdot\frac{5}{6}+3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots\cdots\cdots+n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots①$$

①の両辺に $\dfrac{5}{6}$ をかけて

$$30S_n = \quad 1\cdot\frac{5}{6}+2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots\cdots+(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+n\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \cdots\cdots②$$

①−②より

$$6S_n = 1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-n\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} - n\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$=6\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}-n\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$=6-(n+6)\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

したがって，求める S_n の値は

$$S_n=1-\frac{n+6}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \cdots（答）$$