2025　琉大甲型

1

問1

$$f_2(x)=1+\sum_{k=1}^{2}\frac{x^k}{k!}$$
$$=1+x+\frac{x^2}{2}$$

より，$f'_2(x)=1+x$　……答

問2

$$f_1(x)=1+\sum_{k=1}^{1}\frac{x^k}{k!}$$
$$=1+x$$

$g_1(x)=e^x-f_1(x)$　$(x\geqq 0)$ とすると

$g_1(x)=e^x-(1+x)$

$x>0$ のとき

$g'_1(x)=e^x-1>0$

よって，$g_1(x)$ は単調増加。

また，$g_1(0)=0$ である。

したがって，$g_1(x)\geqq 0$

すなわち，$x\geqq 0$ のとき，不等式 $e^x\geqq f_1(x)$ が成り立つ。 終

問3

$g_n(x)=e^x-f_n(x)$　$(x\geqq 0)$ とすると

すべての自然数 $n\geqq 1$ に対して $g_n(x)\geqq 0$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

（i）　$n=1$ のとき

問2より $g_1(x)=e^x-f_1(x)\geqq 0$ が成り立つ。

（ii）　$n=l$ のとき

$g_l(x)=e^x-f_l(x)\geqq 0$ が成り立つと仮定する。

$n=l+1$ のとき

$$g_{l+1}(x)=e^x-f_{l+1}(x)$$
$$=e^x-\left(1+\sum_{k=1}^{l+1}\frac{x^k}{k!}\right)$$
$$=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{l+1}}{(l+1)!}\right)$$

$x>0$ のとき

$$g'_{l+1}(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^l}{l!}\right)$$
$$=e^x-f_l(x)\geqq 0$$（仮定より）

よって，$g_{l+1}(x)$ は単調増加。

$g_{l+1}(0)=0$ より $g_{l+1}(x)\geqq 0$

よって，$n=l+1$ のときも成り立つ。

(ｉ)，(ii)よりすべての自然数 n に対して，$g_n(x)\geqq 0$

すなわち，$e^x\geqq f_n(x)$　終

問 4

$h_n(x)=f_n(x)+\dfrac{x^n}{n!}-e^x$　$(0\leqq x\leqq 1)$ とすると

すべての自然数 $n\geqq 1$ に対して $h_n(x)\geqq 0$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

(ｉ)　$n=1$ のとき

$$h_1(x)=f_1(x)+\frac{x^1}{1!}-e^x$$
$$=1+2x-e^x$$

$h'_1(x)=2-e^x$

$h'_1(x)=0$ とすると，$x=\log 2$

よって，$h_1(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	1
$h'_1(x)$		$+$	0	$-$	
$h_1(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$3-e$

よって，$0\leqq x\leqq 1$ において $h_1(x)\geqq 0$ が成り立つ。

(ii)　$n=l$ のとき

$h_l(x)=f_l(x)+\dfrac{x^l}{l!}-e^x\geqq 0$ が成り立つと仮定する。

$n=l+1$ のとき

$$h_{l+1}(x)=f_{l+1}(x)+\frac{x^{l+1}}{(l+1)!}-e^x$$

問 3 と同様に微分すると

$h'_{l+1}(x)=f_l(x)+\dfrac{x^l}{l!}-e^x\geqq 0$（仮定より）

よって $h_{l+1}(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1
$h'_{l+1}(x)$		$+$	
$h_{l+1}(x)$	0	$\nearrow$	

よって，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$h_{l+1}(x) \geqq 0$

したがって $n=l+1$ のときも成り立つ。

ゆえに，(i)，(ii)よりすべての自然数 n に対して，$h_n(x) \geqq 0$

すなわち，$e^x \leqq f_n(x)+\dfrac{x^n}{n!}$　終

2025　琉大甲型

2

問 1

$$\int \log x\,dx = \int (x)' \log x\,dx$$

$$= x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= x\log x - \int dx$$

$$= x\log x - x + C \quad (C\text{ は積分定数}) \quad \cdots\cdots \text{答}$$

問 2

$$g(a) = \int_a^{a+1} (x - \log x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x\log x + x\right]_a^{a+1}$$

$$= \frac{1}{2}(a+1)^2 - (a+1)\log(a+1) + (a+1) - \left(\frac{1}{2}a^2 - a\log a + a\right)$$

$$= a\log a - (a+1)\log(a+1) + a + \frac{3}{2} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

問 3　問 2 より

$$g'(a) = \log a + 1 - \{\log(a+1) + 1\} + 1$$

$$= \log a - \log(a+1) + 1$$

$$= \log \frac{ea}{a+1}$$

$g'(a)=0$ とすると

$$\log \frac{ea}{a+1} = 0$$

$$\frac{ea}{a+1} = 1$$

$a = \dfrac{1}{e-1}$ これは，$a > 0$ をみたす。

したがって，$g(a)$ の増減表は次のようになる。

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\cdots$
$g'(a)$	/	$-$	0	$+$
$g(a)$	/	↘	極小	↗

したがって，$g(a)$ は $a = \dfrac{1}{e-1}$ で最小値をとる。

求める最小値は

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{1}{e-1}\right) &= \frac{1}{e-1}\log\frac{1}{e-1} - \left(\frac{1}{e-1}+1\right)\log\left(\frac{1}{e-1}+1\right) + \frac{1}{e-1} + \frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{e-1}\log(e-1) - \frac{e}{e-1}\log\frac{e}{e-1} + \frac{1}{e-1} + \frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{e-1}\log(e-1) - \frac{e}{e-1}\{1-\log(e-1)\} + \frac{1}{e-1} + \frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{e-1}\log(e-1) + \frac{e}{e-1}\log(e-1) + \frac{1}{e-1} - \frac{e}{e-1} + \frac{3}{2} \\
&= \log(e-1) - 1 + \frac{3}{2} \\
&= \log(e-1) + \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots 答
\end{aligned}
$$

2025　琉大甲型

3

問 1

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=14-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2\sqrt{2}$ より

$8=14-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$　……答

問 2

点 H は平面 ABC 上の点なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 s，t，u を用いて次で表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}\quad（ただし\ s+t+u=1\ \cdots\cdots①）$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$(s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2+u\vec{b}\cdot\vec{c})-(s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{a}\cdot\vec{c})=0$$

$$(3s+5t+3u)-(9s+3t+3u)=0$$

$$t=3s\ \cdots\cdots②$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$$

$$(s\vec{a}\cdot\vec{c}+t\vec{b}\cdot\vec{c}+u|\vec{c}|^2)-(s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{a}\cdot\vec{c})=0$$

$$(3s+3t+6u)-(9s+3t+3u)=0$$

$$u=2s\ \cdots\cdots③$$

①，②，③ より $s=\dfrac{1}{6}$，$t=\dfrac{1}{2}$，$u=\dfrac{1}{3}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$　……答

問 3

点 K は平面 OBC 上の点なので，

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=x\vec{b}+y\vec{c}$　(x，y は実数) とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=-\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}\perp\vec{b}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AK}}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$$(-\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c})\cdot\vec{b}=0$$

$$-\vec{a}\cdot\vec{b}+x|\vec{b}|^2+y\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$5x+3y-3=0 \cdots\cdots ④$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AK}} \perp \vec{c}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AK}} \cdot \vec{c}=0$ であるから

$$(-\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c})\cdot\vec{c}=0$$

$$-\vec{a}\cdot\vec{c}+x\vec{b}\cdot\vec{c}+y|\vec{c}|^2=0$$

$$3x+6y-3=0 \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤ より $x=\dfrac{3}{7}$，$y=\dfrac{2}{7}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=-\vec{a}+\dfrac{3}{7}\vec{b}+\dfrac{2}{7}\vec{c}$

ここで直線 OH 上の点を P，直線 AK 上の点を Q とすると，次で表せる。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=l\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ （ k，l は実数）

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{k}{6}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\vec{b}+\dfrac{k}{3}\vec{c}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-l)\vec{a}+\dfrac{3}{7}l\vec{b}+\dfrac{2}{7}l\vec{c}$

ここで点 P，Qが一致するような k，l の値が存在するか考える。

点 P，Q が一致するとき，4 点 O，A，B，C は同一平面上にないので，

$$\begin{cases} \dfrac{k}{6}=1-l \\ \dfrac{k}{2}=\dfrac{3}{7}l \\ \dfrac{k}{3}=\dfrac{2}{7}l \end{cases}$$

これを同時にみたす k，l の値は $k=\dfrac{3}{4}$，$l=\dfrac{7}{8}$

したがって，直線 OH と 直線 AK は交わり，その交点を M とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{8}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$　$\cdots\cdots$ 答

2025　琉大甲型

$\boxed{4}$

問 1

コイン投げで 3 枚とも表となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

袋の中は赤玉 12 個と白玉 3 個となり，この袋から取り出した玉が 2 個とも赤玉となる確率は

$$\frac{{}_{12}\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{22}{35}$$

したがって，$\dfrac{1}{8}\times\dfrac{22}{35}=\dfrac{11}{140}$　……答

問 2

(ｉ)コイン投げで 3 枚とも裏となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

袋の中は赤玉 3 個と白玉 3 個となり，この袋から取り出した玉が 2 個とも赤玉となる確率は

$$\frac{{}_{3}\mathrm{C}_2}{{}_{6}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$$

よって，$\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{40}$

(ii)コイン投げで表が 1 枚，裏が 2 枚となる確率は

$${}_{3}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

袋の中は赤玉 4 個と白玉 3 個となり，この袋から取り出した玉が 2 個とも赤玉となる確率は

$$\frac{{}_{4}\mathrm{C}_2}{{}_{7}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

よって，$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{3}{28}$

(iii)コイン投げで表が 2 枚，裏が 1 枚となる確率は

$${}_{3}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

袋の中は赤玉 7 個と白玉 3 個となり，この袋から取り出した玉が 2 個とも赤玉となる確率は

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$$

よって，$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{7}{15}=\dfrac{7}{40}$

したがって，(i)，(ii)，(iii)，問 1 より求める確率は

$$\frac{1}{40}+\frac{3}{28}+\frac{7}{40}+\frac{11}{140}=\frac{27}{70} \quad \cdots\cdots 答$$

問 3

問 1，問 2より求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{11}{140}}{\frac{27}{70}}=\frac{11}{140}\times\frac{70}{27}=\frac{11}{54} \quad \cdots\cdots 答$$

2025 琉球大学　数学乙

$\boxed{1}$

問 1

$\dfrac{1}{37}=0.\dot{0}2\dot{7}$ であり，100 を 3 で割ると商が 33 で余りが 1 となるから

$\dfrac{1}{37}$ を小数で表したとき，小数第 100 位の数字は　0　……答

次に，$\dfrac{32}{33}=0.\dot{9}\dot{6}$ であり，$\dfrac{1}{37}+\dfrac{32}{33}=0.\dot{0}2\dot{7}+0.\dot{9}\dot{6}=0.\dot{9}9672\dot{3}$ となるので，

100 を 6 で割ると商が 16 で余りが 4 となるから

小数第 100 位の数字は　7　……答

問 2

$$21!=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12\times13\times14\times15\times16\times17\times18\times19\times20\times21$$
$$=1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)\times11\times(2^2\times3)\times13\times(2\times7)$$
$$\times(3\times5)\times2^4\times17\times(2\times3^2)\times19\times(2^2\times5)\times(3\times7)$$
$$=2^{18}\times3^9\times5^4\times7^3\times11\times13\times17\times19\quad\text{……答}$$

問 3

$P(x)$ を 2 次式 x^2-4x+3 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-3)(x-1)Q(x)+ax+b\ \text{……①}\ (a,\ b\ \text{は定数})$$

与えられた条件から，剰余の定理より $P(1)=2$　かつ　$P(3)=11$ ……②

①，②より

$$\begin{cases}a+b=2\\3a+b=11\end{cases}$$

これを解いて

$$a=\frac{9}{2},\ b=-\frac{5}{2}$$

したがって，求める余りは　$\dfrac{9}{2}x-\dfrac{5}{2}$　……答

$\boxed{2}$

問 1

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ より $f'(x)=3x^2+2ax+b$

関数 $f(x)$ は $x=1$，$x=2$ で極値をとるので，$f'(1)=0$，$f'(2)=0$

よって $\begin{cases} 3+2a+b=0 \\ 12+4a+b=0 \end{cases}$

これを解くと，$a=-\dfrac{9}{2}$，$b=6$

逆にこのとき $f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると $x=1$，2

このとき $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

確かに $x=1$，2 で極値をとる。

したがって $a=-\dfrac{9}{2}$ ，$b=6$　$\cdots\cdots$ 答

問 2

問 1 より

$$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+c \cdots\cdots ①$$

接点の x 座標を t とおく（t は実数）。

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=6x-2$ は点 $(t, f(t))$ において接するので，

接線の傾きが 6 となることに注意すると，

$$f'(t)=6 \cdots\cdots ②$$

また $f'(x)=3x^2-9x+6$ より

$$f'(t)=3t^2-9t+6 \cdots\cdots ③$$

②，③ より

$$3t^2-9t+6=6$$

$$t(t-3)=0$$

$$t=0,\ 3$$

ここで 直線 $y=6x-2$ は点 $(t, f(t))$ を通るので，

$$f(t)=6t-2 \cdots\cdots ④$$

$t=0$ のとき ①，④ より

$$c=-2$$

$t=3$ のとき ①，④ より

$$27-\frac{81}{2}+18+c=18-2$$

$$c=\frac{23}{2}$$

よって　$c=-2,\ \frac{23}{2}$　…… 答