

1問1

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ から $2\omega + 1 = \sqrt{3}i$

両辺を2乗すると $(2\omega + 1)^2 = -3$

整理すると $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ …… ①

両辺に $\omega - 1$ を掛けると $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$

よって $\omega^3 - 1 = 0$ すなわち $\omega^3 = 1$ …… ②

①, ② より $\omega^2 + \omega^4 = \omega^2 + \omega^3 \cdot \omega = \omega^2 + \omega = -1$

問2

$\log_{10} 5^{2026} = 2026 \log_{10} 5 = 2026(\log_{10} 10 - \log_{10} 2)$
 $= 2026(1 - 0.3010) = 2026 \times 0.6990 = 1416.174$

ゆえに $1416 < \log_{10} 5^{2026} < 1417$

よって $10^{1416} < 5^{2026} < 10^{1417}$

したがって、 5^{2026} の桁数は、1417

問3

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b}\end{aligned}$$

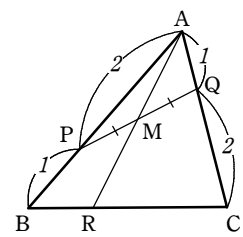
3点 A, M, R が一直線上にあるとき

$$\overrightarrow{AR} = k \overrightarrow{AM} \quad (k \text{ は実数})$$

よって $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3} k \vec{a} + \frac{1}{6} k \vec{b}$

点 R は直線 BC 上にあるから $\frac{1}{3} k + \frac{1}{6} k = 1$ ゆえに $k = 2$

よって $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}$ ゆえに $BR : RC = 1 : 2$



2

問1 曲線 C は、点 (2, 0) で x 軸に接しているから $f(2) = 0$ かつ $f'(2) = 0$

ここで $f(2) = 4p + 2q + 8$

また、 $f'(x) = 3x^2 + 2px + q$ であるから $f'(2) = 4p + q + 12$

よって $2p + q = -4$, $4p + q = -12$

ゆえに $p = -4$, $q = 4$

問2 (1) から $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

ゆえに $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = (3x - 2)(x - 2)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \frac{2}{3}, 2$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$\frac{2}{3}$	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって、極大値は $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{27}$

問3 $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$ であるから、曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - 4t^2 + 4t) = (3t^2 - 8t + 4)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (3t^2 - 8t + 4)x - 2t^3 + 4t^2$$

この直線が点 (2, 0) を通るとすると $0 = 2(3t^2 - 8t + 4) - 2t^3 + 4t^2$

よって $t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = 0$

ゆえに $(t - 2)^2(t - 1) = 0$ よって $t = 1, 2$

このうち、傾きが負になるのは $t = 1$ のときである。

よって、接線 ℓ の方程式は $y = -x + 2$

右の図のようになるから、求める面積は

$$\begin{aligned}& \int_1^2 \{-x + 2 - (x^3 - 4x^2 + 4x)\} dx \\ &= -\int_1^2 (x - 1)^2 (x - 2) dx \\ &= -\int_1^2 (x - 1)^2 (x - 1 - 1) dx \\ &= \int_1^2 \{(x - 1)^2 - (x - 1)^3\} dx \\ &= \left[\frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

