

1

問1 x で微分すると, $\{\log(1+x^2)\}' = \frac{1}{1+x^2} \times 2x = \frac{2x}{1+x^2}$

問2 $f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$

$f'(x)=0$ とすると $x=\pm 1$

よって, $f(x)$ の増減表は次のようになる。

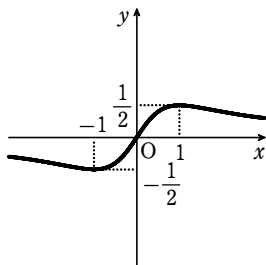
x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

また $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = 0$

(まとめて, $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = 0$ でも可)

ゆえに, 曲線 C の概形は右の図のようになる。



問3 $f(x) = f\left(x - \frac{3}{2}\right)$ とすると $\frac{x}{1+x^2} = \frac{x - \frac{3}{2}}{1 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}$

よって $x + x\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)(1+x^2)$

ゆえに $x^3 - 3x^2 + \frac{13}{4}x = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$

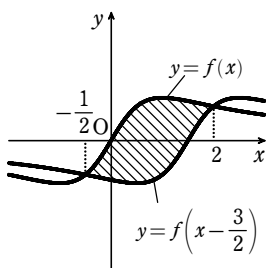
よって $2x^2 - 3x - 2 = 0$ ゆえに $(2x+1)(x-2) = 0$

よって $x = -\frac{1}{2}, 2$

ゆえに, 共有点の x 座標は $x = -\frac{1}{2}, 2$

問4 求める面積を S とすると, 問1 を利用して

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^2 \left[\frac{x}{1+x^2} - \frac{x - \frac{3}{2}}{1 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\log(1+x^2) - \log \left\{ 1 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \right\} \right]_{-\frac{1}{2}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\log 5 - \log \frac{5}{4} - \log \frac{5}{4} + \log 5 \right) \\ &= \log 5 - \log \frac{5}{4} = 2 \log 2 \end{aligned}$$



2

問1 展開して, $(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = x^5 + 1$

問2 解の公式より, $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

問3 $x = z + \frac{1}{z}$ を $x^2 - x - 1 = 0$ に代入すると $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$

展開して $z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - z - \frac{1}{z} - 1 = 0$

分母を払って整理すると $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ ①

一方問1 から, $z^5 + 1 = (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$ であるから, ① の解は,

$z^5 = -1$ の $z = -1$ 以外の解である。

$z^5 = -1$ の解を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ [$r > 0$] とおくと $z^5 = r^5(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)$

また $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$

ゆえに $r^5(\cos 5\theta + i \sin 5\theta) = \cos \pi + i \sin \pi$

両辺の絶対値と偏角を比較すると $r^5 = 1$, $5\theta = \pi + 2\pi \times k$ (k は整数)

$r > 0$ であるから $r = 1$ また $\theta = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi \times k$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$k = 0$ のとき $z = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$

$k = 1$ のとき $z = \cos \frac{3}{5}\pi + i \sin \frac{3}{5}\pi$

$k = 2$ のとき $z = \cos \pi + i \sin \pi = -1$

$k = 3$ のとき $z = \cos \frac{7}{5}\pi + i \sin \frac{7}{5}\pi$

$k = 4$ のとき $z = \cos \frac{9}{5}\pi + i \sin \frac{9}{5}\pi$

$z \neq -1$ であるから, 求める解は

$z = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}, \cos \frac{3}{5}\pi + i \sin \frac{3}{5}\pi,$

$\cos \frac{7}{5}\pi + i \sin \frac{7}{5}\pi, \cos \frac{9}{5}\pi + i \sin \frac{9}{5}\pi$

問4 $z = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ のとき $\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}} = \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$

よって $x = z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{\pi}{5}$

ゆえに, $2 \cos \frac{\pi}{5}$ は $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解である。

よって $2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

ゆえに $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

$z = \cos \frac{3}{5}\pi + i \sin \frac{3}{5}\pi$ のとき $\frac{1}{z} = \cos \frac{3}{5}\pi - i \sin \frac{3}{5}\pi$

よって $x = z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{3}{5}\pi$

ゆえに, $2 \cos \frac{3}{5}\pi$ は $x^2 - x - 1 = 0$ の負の解である。

よって $2 \cos \frac{3}{5}\pi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

ゆえに $\cos \frac{3}{5}\pi = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$

3

問1 点Hは平面 α 上にあるから, s, t を実数として

$$\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ と表される。}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{CH} \perp (\text{平面 } \alpha) \text{ であるから } \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OB}$$

$$\text{よって } (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0, (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{ここで } |\vec{a}|^2 = 4, |\vec{b}|^2 = 2, |\vec{c}|^2 = 1,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 1, \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

$$\text{であるから } 4s - 1 = 0, 2t - 1 = 0$$

$$\text{したがって } s = \frac{1}{4}, t = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\text{点Hは線分CDの中点であるから } \overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\text{問2 求める体積を } V \text{ とすると } V = \triangle OAB \cdot CH \cdot \frac{1}{3}$$

$$\text{ここで } \triangle OAB = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= |\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC}|^2 = \left| \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} - 2 \cdot \frac{1}{2} \vec{b} \cdot \vec{c} - 2 \cdot \frac{1}{4} \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{CH}| > 0 \text{ であるから } CH = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } V = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

問3 点CとGは平面 α に関して同じ側にあり, 平面 α に関して点Cと対称な点はDであるから

$$CP + PG = DP + PG \geq DG$$

よって, 線分DGと平面 α の交点が P_0 である。

p を実数とすると, $\overrightarrow{OP_0} = p\overrightarrow{OG} + (1-p)\overrightarrow{OD}$ と表せる

$$\begin{aligned} \text{から } \overrightarrow{OP_0} &= p \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} + (1-p) \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \right) \\ &= \frac{3-p}{6}\vec{a} + \frac{3-2p}{3}\vec{b} + \frac{4p-3}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

$$\text{点 } P_0 \text{ は平面 } \alpha \text{ 上にあるから } \frac{4p-3}{3} = 0$$

$$\text{よって } p = \frac{3}{4}$$

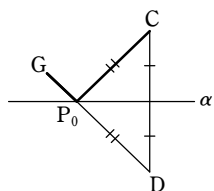
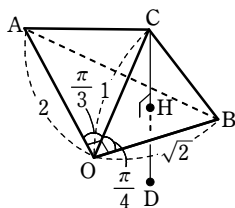
$$\text{ゆえに } \overrightarrow{OP_0} = \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

また, $CP_0 + P_0G$ の値は $|\overrightarrow{DG}|$ と等しいから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{DG}|^2 &= |\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OD}|^2 = \left| \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \right|^2 \\ &= \left| -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{36}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{16}{9}|\vec{c}|^2 + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \vec{b} \cdot \vec{c} - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6} \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{DG}| > 0 \text{ であるから } |\overrightarrow{DG}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{したがって } CP_0 + P_0G = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



4

$$\text{問1 } X=1 \text{ となるのは, 1 回目 に 3 を取り出すときであるから } P(X=1) = \frac{1}{4}$$

$X=2$ となるのは, (1 回目, 2 回目)=(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2) のときであるから

$$P(X=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 4 = \frac{1}{3}$$

問2 $X=1, 2, 3$ のとき, この試行は成功する。

$X=3$ となるのは

(1 回目, 2 回目, 3 回目)=(1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 3, 4), (4, 3, 2)

のときであるから

$$P(X=3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 = \frac{1}{6}$$

よって, この試行が成功する確率は

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$$

$$\text{また, 期待値 } E(X) \text{ は } E(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{12}$$

問3 番号の和が6となるのは

[1] (1 回目, 2 回目)=(2, 4), (4, 2)

[2] (1 回目, 2 回目, 3 回目)=(1, 3, 2), (2, 3, 1)

のときである。

$$\text{よって, 番号の和が6となる確率は } \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{4}$$

また, 番号の和が6となる事象を A , $X=3$ となる事象を B とすると, $P(A \cap B)$ は

[2] の場合の確率であるから

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{12}$$

$$\text{ゆえに, 求める条件つき確率は } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$